

Ikuspuntu berriak umeen zenbatze-ekintzari buruz: Piaget-engandik harago

José Domingo Villarroel Villamor
EHUko irakaslea

Teresa Nuño Angós
EHUko Eskolako katedraduna

Umeei dagozkien aktibitateen artean, zenbatzea da, apika, berezko izaera matematikoa duen lehenengo ekintza. Eguneroko bizimoduan, guraso eta zaintzaileek haurtxoei hornitzen dizkiete zenbakiak eta zenbakiak erabiltzen ikasteko aukera anitz. Matematikako zeregin goiztiar horiek, ordea, galdera interesgarri bat iradokitzen dute: umetxoek ulertuko ote dute zer egiten duten zenbatu bitartean? Artikulu honetan, galdera horri erantzuteko egin diren saiakeren erreposoa eskaintzen da. Hasteko, Jean Piaget-en ikusmoldearen arabera, umeen aritmetika-abilezien ezaugarriak azaltzen dira. Jarraian, autore horren teorian aintzat hartzen ez diren sei urtetik beherako haurren zenbatze-ekintzaren gaineko datuak azalduko dira. Amaitzeko, azken urteotan estimuluen ezaugarri kuantitatiboek erreparatzeko bi urtetik beherako umeek adierazten dituzten ahalmenen inguruko ikerkuntzaren berrikuspena agertuko da.

Counting is, perhaps, one of the first mathematical activities that children use to do. Parents and caretakers offer to children multitude of situations in which they can learn the numbers and their use. These early activities leave an interesting question: Do children understand what they do while they are counting? This article reviews the attempts to answer to this question. At the beginning the piagetian perspective related to arithmetical abilities of children will be explained and, next, data about the understanding of numbers of children younger than 6 years will appear on. The article will finish reviewing the research done about the abilities of children younger than 2 years old to notice quantitative characteristics of the stimulus.

Sarrera

Egun pentsamendu matematikoaren sorreraz eta bilakaeraz daukagun kontzeptzioa, hein handi batean, Jean Piaget-en lanaren ondorioa da. Bere ikertze-aktibitate joriaren bidez ezarri zituen gizakiaren lehenbiziko urteetako pentsamendu matematikoaren bilakaeraren ezaugarriak eta estreinako matematika-kontzeptuak hautematen ahalbidetzen dituzten baldintzak.

Zenbakiaren nozioari dagokionez, Piaget-ek nabarmendu zuen zein izan daitekeen pentsamendu logikoaren gutxieneko garapen maila, zenbaketaren funts matematikoa ulertuko bada. Ildo horretatik, zenbaketarekin erlazionaturiko aktibitateak goiztiarrak izan daitezkeen arren, Piaget-en ustetan operazio-aurreko etaparen bukaera arte (sei urte inguruan) haurrek ez dituzte betetzen zenbakiaren kontzeptua ulertzen errazten duten baldintza logikoak (Piaget, 1965).

Piaget-en postulatuon ziurtasun esperimentalak erabatekoa izan arren, azken urteotan datu berriak agertzen ari dira zeinek perspektiba zabaltzea dakarten pentsamendu matematikoaren sorrerari buruz, betiere, ikuspegi piagetarra ezeztatu gabe.

Datu esperimental berriok bereziki hiru esparrutatik eratorzen dira. Alde batetik, 2 eta 4 urte bitarteko umeek dauzkaten gaitasun aurrematematikoaren inguruko ikerkuntzak agertzen ditu ebidentziak, lehenago oharkabean igaroak zirenak (Butterworth, 2005). Bestalde, hainbat ikerlanek egiaztatu dute dagoeneko urtebete izan aurretik, gizakiok estimuluen erregularitasun kuantitatiboei erreparatzeko ahalmena izan badugula (Xu eta Arriaga, 2007; Feron *et al.*, 2006; Brannon *et al.*, 2006; Kobayashi, 2004). Azkenik, neurozientzien aldetik pentsamendu matematiko eta zenbakien ulerkuntzaren oinarri fisiologikoen gaineko datu ezin esanguratsuagoak ari dira plazaratzen (Alonso eta Fuentes, 2001; Díaz, 2006; Piazza *et al.*, 2007; Cohen *et al.*, 2007; Daniel, 2007, Welberg, 2007).

Artikulu honetan datu esperimental horiei buruzko errepasoa eskaintzen da, baita ebidentzia horiek zirriborrotzen dituzten zenbakiaren kontzeptuaren sorrera eta bilakaerari buruzko perspektiba berriak ere; izan ere, ebidentzia horiek egungo pentsamendu matematikoaren gaineko paradigmatik ez ezik, planifikazio didaktikoak ere zeharo eragiten dituzte.

Xede horiekin, idazki honi hasiera ematen zaio umeen garapen kognitiboan zenbaketak duen garrantzia eta agerpena birpasatuz eta, horrekin batera, zenbakiaren kontzeptuaren ulertze-prozesuaz Piaget-ek utzi digun ikusmoldea ere jorratzen da. Jarraian, Gelman eta Gallistel-en ikuspegia aurkezten da; izan ere, autore horiek 2 eta 4 urte bitarteko umeek duten zenbaketaren kompetentziaz ikuspegi ezberdina agertzen dute. Horren ostean, umeen sortzetiko zenbatze-abileziez egungo ikerkuntzak eskaintzen dituen datuen bilduma azaltzen da. Idazkiaren amaieran ondorioetarako tarte zabaltzen da.

1. Operazio-aurreko etapako umeen zenbatze-gaitasuna

Umeei dagozkien aktibitateen artean, zenbatzea da, apika, berezko izaera matematikoa duen lehenengo ekintza.

Eguneroko bizimoduan, guraso eta zaintzaileek umetxoei hornitzen dizkiete zenbakiak ikasteko aukera anitz eta, besteak beste, urteak, orduak, prezioak, solairuak, bidaiak ala telebista-saioak erabiltzen dituzte haurtxoak estimulatzeko oinarrizko abilezia matematiko honetan.

Umetxo askoren kasuan matematikarako sarbide hau oso goiztiarra izaten da. Durkin eta besteek (1986) aditzera eman zuten lehenengo urtea egin aurretik ohi-koak direla aita-amen saiakerak umetxoei zenbakiak erakusteko eta, hartara, zenbatze-hitzak testuinguru ugarietan erabiltzen dituztela: abestiak, errimak, istoriotxoak, jokoak eta zenbakien sekuentzia espresuki errezipitatzea. Gainera, zenbakiakin loturiko aktibitate horien maiztasuna zein zailtasuna areagotzen dira haurtxoak koskortu ahala (Benigno eta Ellis, 2004).

Praktika sozial horien bidez, umeen sistema kognitiboan zubia ezartzen da, berez, sortzetik, haurtxoek dakarten zenbakizko zentzuaren eta geroko matematika-lorpen aurreratuen artean, hain zuzen, pentsamendu matematikoaren lehenbiziko urratsa abiaraziz (Butterworth, 2005).

Arestian aipaturiko matematikako zereginetikiko hurbilketa goiztiar horiek galdera interesgarri bat iradokitzen dute: umetxoek ulertzen ote dute zer egiten duten kontatzen duten bitartean?

Galdera horren erantzuna bilatu dutenen artean Jean Piaget izan zen lehenbikoa. Piaget-en arabera lehen haurtzaroko umeei (hau da, 6 urtetik beherakoek) zenbakien sekuentzia esan ahal izango dute; baita, beharbada, ikasi ere nola aplikatu zenbait objektu ala ekintzetan baina, bere ustez, haurrek ezingo die zenbakiei hauteman ele sorta bati egin diezaioketen baino zentzu handiagorik.

Piaget-en ikusmoldea errotzen da operazio-aurreko etapako umeei kontserbazio, trantsitibotasun eta serieen eraketaz adierazten duten ulermenaren analisisan, zeinak nabarmentzen duen adin horretako umeei nekez uler dezaketela zenbakien zentzu kardinal eta ordinala.

Zenbakien zentzu kardinala multzo bateko kopuruari dagokio eta, hala, zenbaki berbera duten objektu multzo orok elementu kopuru berbera daukate eta multzo-tako elementuen bana-banako korrespondentzia egin daiteke. Zentzu ordinala, ordea, zenbaki ezberdinen arteko erlazioari dagokio eta umeei ulertu behar du zenbaki-sekuentzia bateko zenbakien ordena magnitude gorakorra dela, non, esaterako, 5 izango da handiagoa 3 baino, zeren eta 4 da 3 baino handiagoa eta 5 handiagoa 4 baino.

Arestian aipatu bezala, Piaget-ek uste zuen operazio-aurreko etapako umeei ezin dituztela zenbakien zentzu kardinal eta ordinal horiek ulertu, besteak beste, zenbakiaren kontserbazioaren nozioa bereganatu gabe dutelako; hau da, multzo bateko elementu kopuruak irauten du, multzoan eragin daitezkeen aldakuntzak gorabehera.

Esaterako, ilaran jarritako bi objektu multzo konparatzean umeei ilaren luzerari erreparatuko diote erabakitzeke zein multzok duen objektu kopuru gehien eta hori gertatzen da operazio-aurreko etapako umeen kasuan multzoen objektuak zenbatzen jakin arren. Ondorioz, adin horretan zenbakiak errezipitatzeak, baita kontatzeko

kasuan ere, ez du bermatzen hurrek ulertzen dutela objektu multzoetan egiten diren itxuraldaketek objektu kopuruan eraginik ez dutela.

Ildo horretatik, Gréco-k (1962) bereizi zituen bi kontserbazio mota; multzoetan zenbatze-sekuentzia zuzen erabiltzetik eratoritzen dena, eta multzoetako objektu kopuruari dagokiona (Chamorro *et al.*, 2006).

Lehenengo kontserbazio motak adierazten du umea konturatzen dela bi multzok *zenbaki* berbera dutela, baina *zenbaki* zentzu hori zenbatze-sekuentzia erabiltzea-rekin baino ez litzateke erlazioatuko. Fenomeno horren ondorioz, bi multzoetako elementuak kontatzeko zenbatze-hitz egokia erabili arren, umeek baieztatu dezakete multzo batek elementu gehiago duela beste bigarren batek baino, adibidez, multzoetan luzeenari zenbatasun handiagoa esleitzen diolako.

Multzoen arteko zenbatze-hitz hutsean oinarrituriko kontatze-ahulezia hau *quotité* izendatu zuen Gréco-k, bereizteko 7 urte inguruan umeek bereganatzen duten *quantité* izeneko bigarren kontserbazio mota, zeinaren bidez umeek hautesmaten duten multzoen itxuraldaketek kantitatean eraginik ez dutela (Gréco, 1962).

Bestalde, operazio-aurreko etapako umeek zenbakiaren zentzu kardinala eta ordinala ulertzeko Piaget-ek ezartzen duen beste oztopoetako bat da serie bateko elementuen arteko erlazioaren inguruko ulermen falta, zeina nabarmentzen den ikertzaileak egin zituen trantsitibotasun eta serieen esperimenduetan.

Alde batetik, zailtasun nabarmenak dituzte tamainaren arabera zenbait elementuren serie ordenatua egiteko baina, horrez aparte, umeek ulertu arren *A objektua* handiagoa dela *B objektua* baino eta *B* handiagoa izan daitekeela *C objektua* baino, ezin dituzte bi baieztatu horiek aldi berean koordinatu eta, hala izanik, ez dira gai ondorioztatzeko *A objektuak* handiagoa izan behar duela *Ck* baino. Piaget-en ustez, esperimendu horiek adierazten zuten haurtxoek ezin zutela ulertu zenbaki-sekuentzia goranzko magnitude gisa.

Ebidentzia hauek bultzatu zuten Piaget pentsatzera ezen haurrak kontatzeko gai direla zenbaketa-aren adiera ulertu baino urte dezente lehenago, baina errutinazko berba-akzio hori adiera matematikorik gabekoa dela harik eta operazio-aurreko etapa gainditu arte.

2. Zenbaketa-aren trebetasunaren aurretiko printzipioak

Egiantan, nekez argudia daiteke ezer askorik Piaget-en ikuspegiaren aurka. Umetxo batek bi objektu multzo zenbatutakoan 5na elementu dutela badio eta hala eta guztiz ere, haietariko batek besteak baino *gehiago* duela argudiatzen badu, ezin da baieztatu ume horrek 5 zenbakiaren esangura ulertzen duela. Era berean, ezin da baieztatu umeak zenbakiaren kontzeptua bereganatu duela ez badu ulertzen 3 baino gehiago 5 direla; hain zuzen ere, 5 delako 4 baino handiagoa eta azken hori baino txikiagoa 3 delako.

Hala eta guztiz ere, laurogeiko hamarkadaren inguruan, Gelman-ek eta Gallistel-ek (1978) eta Gelman-ek eta Meck-ek (1983) agertu zuten bestelako proposamena zenbaketa-aren ulerkuntzari buruz.

Autore horiek ezberdintzen dituzte bi kontzeptu garrantzitsu: alde batetik, zenbatze-ekintza egiten den bitartean norbera zertan ari den ulertzeko beharrezkoak diren ulertze-oinarriak edo printzipioak eta, bestetik, akatsik gabe printzipio horiek martxan jartzea, une orotan eta testuinguru ezberdinetan. Azken horri zenbatzeko trebetasuna deritzote.

Ikertzaile horien ustez, umetxoek garapenean zehar aldea suertatzen da zenbaketaren ulertze-oinarri edo printzipioak hautematen direnetik, horien erabilera praktikoa eta errorerik gabeko trebetasuna atzematen duten arte. Haien ustez, 2 eta 3 urte bitarteko umeek zenbatze-printzipioak bereganatuta dituztela susmatzeko behar bezalako argibiderik egon badago eta, ildo horretatik, baieztatu daiteke umeek jakin badakitela zertan ari diren zenbatu bitartean. Hala ere, ikertzaileon usteetan, printzipio horien praktikan umeek errore dezente egin ditzakete, ez zenbatze-printzipioak ulertze faltagatik, baizik eta, printzipio horien praktikarako denbora luze-xeagoa behar dutelako.

Zenbatze-printzipio aipatuok honako hauek dira eta hauetatik lehenbiziko hirurak “nola zenbatu” ideiarekin zeharo erlazionaturik daude:

- Umeak ulertu behar du multzo bateko objektuak kontatzeko, multzoko guztiak kontatu behar dituela eta bakoitza behin baino ez. Autoreok printzipio honi bana-banako printzipioa deritzote eta Piaget-en bana-banako korrespondentziarekin konparatuta, exigentzia kognitibo baxuagoa ezartzen du, zeren eta, Piaget-enean ez bezala, ez baitagokio multzo ezberdinen arteko erlazioari, objektuak zenbatzen jakite soilari baizik.
- Bestalde Gelman-ek eta Gallistel-ek aipatzen dute zenbatzeko umeak ordena iraunkor baten bidez erabili behar dituela zenbatze-hitzak; hau da, multzo bateko elementuak ordena jakin batean kontatzen dira eta beti ordena berberaz. Horri deitzen diote ordena egonkorraren printzipioa eta kasu honetan, antza du Piaget-ek aipaturiko zentzu ordinalarekin. Azken horren aldean, ordea, kontaketa, zenbaki-sekuentzia egonkor eta iraunkor batean erabiltzean datza, zenbakiak magnitude gorakor baten sekuentzia gisa ulertzeraino iritsi gabe.
- Kontatzen jakiteko haurrak ulertu behar duen beste printzipioetako bat zentzu kardinalarekin dago lotuta, baina, berriro ere, ez Piaget-ek aipatzen zuen adiera berean. Piaget-ek zentzu kardinala ulertzen zuen objektu kantitate bereko multzoen arteko konparazio moduan; Gelman-ek eta kolaboratzaileek darabilten zentzu kardinala, ordea, soil-soilik honako honi dagokio: multzo bateko elementua kontatzeko aipatzen den azken zenbakiak multzo osoa errepresentatzeko balio duela ulertzeari.

Azken proposamen honen arabera, zentzu kardinala ez legoke lotuta multzoen arteko konparaketa batekin, baizik eta multzo bakar baten balioarekin (hau da, ulertzearekin “bat, bi eta hiru” zenbatzean “hiru”-k balio duela adierazteko multzoan zenbat objektu dauden).

- Abstrakzio-printzipioa. Honen arabera, multzo bateko zenbakiak ez du erlaziorik multzoko elementuen ezaugarri kualitatiboekin eta, ondorioz, edozein entitate, objektu edo jazoera zenbatzekoa da.

- Objektu-hurrenkeraren inportantziarik eza; hau da, zenbatze-emaiza ez da aldatzen elementuak kontatzeko erabiltzen den ordena edozein izanik ere. Hala, errenkadan jarritako pilotatxoek zenbatze-ekintza berdintsu has daiteke ezkerretik eskuinera zein alderantzizko eran.

Zenbatzeko ulertze-oinarri edo printzipio hauek ume txikiak ere (2 eta 3 urtekoak) ulertzeko gauza dira, ohiko praktikan akatsak izan ditzaketen arren eta, horren ondorioz, haurtxoak kontatzen hasten direnean zertan ari diren jakin bada- kitela aitortu beharra dago. Esaterako, Gelman-ek eta kolaboratzaileek eginiko iker- lanetan erregistratzen zuten 2 eta 3 bitarteko haurtxoek kontatzen zutela ordena iraunkor batez, multzoko objektu guztiak kontatzen zituztela baina behin baino ez eta objektu multzoari esleitzen ziotela kontaketa aipaturiko azken zenbakia. Horrez aparte, umetxoak ohartzen ziren txotxongilo batek egiten zituen kontatze- akatsez (objektu multzo baten kopurua adierazteko azken zenbaki aipatua ez erabiltzea edo objektu guztiak ez kontatzea).

3. Berbazko errutinak matematika-kontzeptuen ulerkuntzan

Azaldutakoaren arabera badirudi Piaget-ek eta Gelman-ek zenbaketari buruzko kontzeptzio ezberdinak dituztela. Lehenengo taulan aurkezten da autore bi horien proposamenen arteko konparaketa (ikusi 1. taula).

Piaget-ek multzoen arteko erlazioetan kokatzen du kontaketa ulerkuntza eta, zehatzago, zentzu kardinala eta ordinala hautemateari deritzo ezinbesteko gaitasuna kontaketa zer den ulertzeko.

	Gelman	Piaget
Zentzu kardinala	Kontatze-ekintzan erabilitako azken zenbatze-hitzak multzo osoa irudikatze erabileran.	Kopuru bereko multzoen arteko erlazioaren ulerkuntza.
Korrespondentzia	Multzo bateko objektu oro kontatu behar dira baina ezin dira zenbatu behin baino gehiagotan.	Umeak ulertu behar du multzo ezberdinetako elementuen arteko bana-banako correspondentzia.
Zenbatze-hitzen ordena	Umeak erabili behar du zenbatze- hitzen sekuentzia egonkorra.	Umeak ulertu behar du hitz- sekuentziaren esangura kuantitatiboa; hau da, sekuentziak errepresentatzen du goranzko magnitudea.

1. taula. Piaget-en eta Gelman-en abiapuntuak umeen zenbatzeko ulermena aztertzeko

Gelman-ek, ordea, zenbatzeko prozedurazko abilezien praktika zuzena eta zenbatze-printzipio oinarrikoen ulertzea bereizten ditu eta, modu horretan, azal- tzen saiatzen da haur txikiak jakin badakitela zenbatzean zertan ari diren baldin eta praktikotasunarekin lotuta dauden printzipiook agertzen badituzte.

Zenbaiten ustetan, Gelman-en ikusmoldetik zenbatzearen gaineko exigentzia kognitibo apalagoa eratoritzen da eta proposaturiko kontaketa buruzko ulerkuntza hurbilago dagoela berbazko errutina hutsetik, benetako ulerkuntza matematikotik baino (Bryant, 1996).

Ildo horretatik eta zentzu kardinalari dagokionez, ba omen dago ebidentziarik azaleratzen duena umeeek objektu multzo baten kontaktetako azken zenbakia erabil dezaketela multzo horren elementu kopurua adierazteko; hain zuzen ere, konturaten direlako azken zenbatze-hitza hori garrantzitsua dela. Hala eta guztiz ere, inportantzia hori zertan datzan ulertu gabe gera daitezke zeren eta azken zenbaki horren adiera kuantitatiboa ez baitute hautematen (Sophian, 1988; Fuson *et al.*, 1988).

Ikusi batean, matematika-sinboloen errutinazko erabilerak pentsamendu matematikoarekin erlazio eskasa izan dezakeela eman arren, nabarmendu beharra dago ikuspegi sozio-konstruktibistatik gidaturiko matematika-diskurtsoen analisiak azpimarratzen duela kontzeptu matematikoen ulertze-prozesuan estereotipo edo klise linguistikoek jokatzen duten zeregin funtsezkoa (Sfard, 2000a, 2000b).

Ikusmolde honen arabera, matematikako nozioak ulertzeko hasiberriak argitu beharra du korapilo latza: matematika-kontzeptuak komunikatu eta ulertzeko sinboloak erabili behar ditu baina sinboloen erabilera zuzena egiteko aurretik kontzeptuak barneratuta izan beharra dago. Badirudi, hortaz, hasiberriak irtenbiderik ez duela: sinbolo matematikoen erabilera oso eta zuzenik ezin du egin kontzeptuak bereganatuta ez daudelako baina, bestalde, nola hautemango du kontzeptuen zentzua, ez baditu sinboloak erabiltzen?

Sinboloen erabiltze estereotipatuan dago korapilo horren askatze-gakoa. Hasi-berriak matematikako sinboloak (idatzi edo berbazkoak) erabiltzen hasi behar du kontzeptua bera osatua izan baino lehen baina, betiere, klise edo estereotipo linguistikoek bidez. Errutinazko estereotipo linguistiko horiek matematikako diskurtsoa exijentzia formaleko mugetara egokitzen lagunduko diote hasberriari (Sfard, 2000b).

Kontzeptuen eraketarako ikuspegi sozio-konstruktibista honetan, interakzio komunikatiboa zeharo garrantzizkoa suertatzen da; izan ere, kontzeptu matematikoen sortze-prozesuan akzio komunikatiboak adieraziko du estereotipo linguistikoak egokitzen diren sinboloek duten esanahi formaletara.

Kontaktaren esparrura bueltatuz eta perspektiba sozio-konstruktibista honetan oinarriturik, Gelman-ek eta kolaboratzaileek aipatzen dituzten zenbatze-printzipiook ez dirudite aski baieztatzeke umeeek zenbatze-hitzen zentzu matematiko osoa barneraturik daukatela baina bai nahiko direla umeari ziurtatzeko bere kontaktzekintza testuinguruak exijitzen dizkion molde formaletara egokitzen dela.

Gelman-ek eta kolaboratzaileek beraiek deitzen zioten bere proposamenari "gaitasunak baino lehenagoko printzipioa"; hain zuzen ere, azpimarratzeko bost printzipiook errespetatzen dituzten umeeek (2 eta 4 urte bitartean jazotzen den egokiera) zenbatzeko oinarria dutela, erabateko gaitasun kontzeptuala bereganatu gabe izan arren.

Alde batetik, umeari zenbatze-ekintza ahalbidetzen diolako eta, beste alde batetik, geroko kontaktaren funts kontzeptuala hezuramaitzen laguntzen diolako, badirudi Piaget-ek aipatzen zuen zentzu kardinal eta ordinalen bereganatze-unea baino lehenagoko printzipioen faseari erabateko izaera matematikoa erantsi dakiokela.

4. Jaiotzetiko zenbakizko kognizioa

Arestian aipatu den legez, badirudi zenbaketarekin lotuta dauden praktika sozialek (urteak, solairuak ala jostailuak kontatzeak, esaterako) zubi-lan egiten dutela berez, sortzetik, haurtxoek dakarten zenbakizko zentzuaren eta geroko matematika-lorpen aurreratuen artean (Butterworth, 2005).

Ildo horretan, azken hamarkadotan ikerlan ugari agertu dira zeinek aditzera ematen duten umetxoek, bi urte izan aurretik, izan badutela ukitze eta ikus-entzunezko estimuluaren erregulartasun kuantitatiboei erreparatzeko gaitasuna.

Ikerkuntza-arlo honek ireki ditu ikuspegi berriak, zabaltzera behartzen dutenak egun matematikaren pentsamenduaren garapenari buruz dagoen eredia.

Jarraian umetxoen zenbakizko kognizioaren gaineko ikerketaren emaitza nagusien berriskustea aurkeztuko da. Zenbait aspektu metodologiko ere azalduko dira; izan ere, arlo honetako ikertze-metodologiak ezagutzeko moduko berezitasunak ditu. Ondoren, ikerkuntza-lerro honen errebasoa aurkeztuko da, lehenbizi ibilbide historikoa agertuz eta, azkenik, egungo panorama azalduz.

4.1. Aspektu metodologikoak

Umetxoen zenbaki-kognizioa aztertzeko, bereziki, bi metodologia mota erabiltzen dira: *ohitze-metodoa* eta *presuntzio haustua* (Feigenson *et al.*, 2004).

Ohitze-metodoaren funtsa honetan datza: lehenik zenbatekotasun jakin bat ikusten ohitu behar da umea. Esaterako, 8 zirkulu beltzez osaturiko irudiak aurkezten zaizkio zenbait aldiz. Irudi horietako zirkuluen tamaina eta posizioa aldatuz doa irudiz irudi.

Bigarren fase batean (test faseak, alegia) zenbatekotasun bera duten estimuluaren artean, beste kopuru bat duen irudia aurkezten zaio umetxoari (adibidez, 16 zirkulu beltzekoa). Umearen aurpegira zuzenduriko kamera baten bidez grabatzen dira bere begitartearen keinuak; hain zuzen, neurtzeko zenbat denbora so egiten dien banan-banan agertzen zaizkion ikusizko estimuluei.

Ikertzaileak kontrolatu behar du zenbatekotasuna ez diren bestelako aldagaiek eragin ez ditzaten esperimentuaren emaitzak; hau da, ohitzeko faseko irudien ezaugarri jarriak (tamaina, distira, dentsitatea eta abar) eta test fasekoak ezin dira ezberdinak izan.

Ohitze-metodologiaren bidez eskuratu diren emaitzek argi adierazten dute test fasean estatistikoki umeak luzaroago geratzen direla begira zenbatekotasun berria irudikatzen duten estimuluei, ohiko estimuluei baino. Adibideekin azaltzeko, 8 zirkuluz osaturiko estimuluaz ohitzen badugu umea, geroan, test fasean, 16koari so egingo dio luzaroago 8koari baino (eta alderantziz). Gauza bera ikusi da 16 *versus* 32. Baina esperimentuok umeen mugak ere erakusten dituzte; izan ere, umeek kale egiten dute bereizteko 8 *versus* 12 eta 16 *versus* 24. Horren esplikazioa haxe ei da: umeak zenbatekotasun arteko gutxieneko distantzia behar duela aldea antzemateko.

Presuntzio haustuaren metodologian ere ikusizko estimuluak erabiltzen dira maiz baina azken urteotako esperimenduetan ukitze eta entzunezkoak ere maneiatu dituzte. Aurreko metodologian bezala, umetxoaren begiratze-jokabidea aztertu eta neurtzean datza.

Aldea, ordea, hauxe da: umeari agertzen zaizkio aurreikusteko moduko gertaerak eta, tartean, presuntzioa hausten dutenak. Adibidez, umetxoari panpinatxo bat erakutsi ostean, berau estalki batez ezkututzen da. Jarraian, estalkiaren atzean beste panpinatxo bat jartzen dela erakusten zaio nabarmen. Amaitzeko kentzen da estalkia eta agertzen badira 2 panpinatxo, horixe da aurreikusteko moduko gertaera. Aitzitik, esperimendatzaileak, truku baten bidez, 3 panpinatxo agerrarazten baditu, horixe da presuntzioa hausten duen jazoera.

Metodologia hau aplikatu diren esperimenduetan estatistikoki frogatu da umeak luzaroago geratzen direla begira presuntzioa hausten duen jazoerari (adibidez, $1+1=3$), aurreikusteko moduko gertaerari baino (adibidez, $1+1=2$). Bestalde, ikusi da zentzumen ezberdineko informazioa ere integra dezaketela.

4.2. Berrikuste historikoa

60ko hamarkadaren bukaeran argitaratzen hasi ziren lehenengo lanek aditzera eman zuten gizakion zenbakizko kognizio-ahalmena uste baino goiztiarra izan zitekeela.

Lan aitzindari horien errebasoari hasiera eman dakioke Mehler eta Bever-en (1967) eta Gelman-en (1972) ikerlanak aipatuz; izan ere, autore horiek erregistratu zuten 2 eta 3 urte bitarteko umeek gaitasuna izan bazutela kantitate txikiekin zenbakizko informazioa bereizteko. Gelman-ek, gainera urrats bat harago egin zuen baieztatzean:

... objektu kopuru gutxiko multzoekin, bi eta hiru urte bitarteko haurtxoek azaltzen duten jokabideak pentsatzeko hizpidea ematen du benetan adin horretan haurtxoek jakin badakitela multzoek aldaezin dirautela lekualdatze moduko aldatetara baina ez, ordea, kentze- edo batze-akzioen ondoren (...) are gehiago (...) horren umetxo izanik ere, badirudi ulertzeko gauza direla kenketa eta batuketa eragiketen erlazio alderantzizkoa (Gelman, 1972: 162).

Ildo beretik, Starkey eta Cooper-ek (1980) erakutsi zuten bi urteko umetxoek zenbakizko gaitasuna agertzen zutela, hain zuten ere, elementu gutxiko multzoen diskriminazio, irudikapen eta ezagutzarekin lotuta zegoena. Ikertzaile horiek seinatu zuten, euren emaitzak aintzat hartuz, beharrezkoa zela suposatzea berbazko kontaketa aurreko egitura kognitibo aitzindari baten existentzia.

Bestalde, Starkey-ek eta besteek (1983) umetxoaren begiratze-jokabidea kontrolatu zuten aztertzeko ea ikusizko estimulu mota jakin batekin preferentzia azaltzen zuten sekuentzia soinu baten ostean. Emaitzek argi erakusten zuten sekuentzia soinu baten entzun ostean, haurtxoek luzaroago so egiten zutela multzo jakin batzuei eta multzo horien elementu kopurua bat zeterrela sekuentzia soinu baten adituaren hots kopuruarekin. Ikertzaileok ondorioztatu zuten ezinbestean umetxoek mekanismo kognitiboren bat izan behar zutela, estimuluetatik zenbakizko informazioa erazten ahalbidetzen ziena.

Horretaz gainera, 80ko hamarkadan ere plazaratzen hasi ziren datu berriak urtea bete gabeko haurtxoek objektu fisikoen gainean zuten ulerkuntza mailaz. Baillargeon-ek eta besteek (1985) eginiko ikerketan frogatu zuten 5 hilabeteko haurrek estimuluetatik zenbatekotasun-informazioa eskuratzeko gauza izateaz aparte, nolabait, ulertzen zutela, objektuek irauten zutela begi-bistan desagertzen baziren ere. Ildo beretik, Baillargeon-ek (1987) aditzera eman zuen 3 eta 5 hilabetekoek ulertzen zutela objektuek existitzen segitzen dutela, ezkutuan egonik ere.

Objektuak begi-bistan egoteari uzteak objektuaren existentzia eragiten ez duela ulertzea garrantzi handiko aspektua da zenbakizko kognizioa izan ahal izateko. Simon-ek eta besteek (1995) adierazten duten bezala, «edozein ulerkuntza zenbaki edo aritmetika kontzeptuen inguruan, nahitaez, lotuta dago objektu fisiko eta euren existentziarako baldintzen ulerkuntzarekin».

Bestalde, Wynn-ek (1992) ikertu zuen ea umetxoek sentsibilitaterik zuten multzoetan eginiko batuketa- eta kenketa-ekintzekiko. Hartara, 5 hilabeteko haurtxoei erakusten zien panpinatxo bat, segituan pantaila baten bidez ezkututzen zena. Geroago, umetxoari erakusten zitzaion panpinatxo bat pantailaren atzean ere jartzen zena. Esperimentuaren amaieran pantaila erretiratzeko panpinak berriro begi-bistan erakusteko baina aldizka agertzen zen panpinatxo bakar bat, bi edo hiru. Haurtxoaren begiratze-jokabidea miatuz, Wynn-ek aurkitu zuen ume-txoek estatistikoki luzaroago so egiten ziotela $1 \text{ panpinatxo} + 1 \text{ panpinatxo} = 3 \text{ panpinatxo}$ jazoerari (presuntzioa hausten zuen jazoera) $1+1=2$ gertaterari (aurreikusteko moduko gertaera) baino. Esperimentuaren metodologia berberaz, batuketaren ordez, kenketan oinarritzen bazen, berriro ere umeek luzaroago begiratzen zioten presuntzioa hausten zuen jazoerari (kasu honetan, $2-1=2$ delakoari) aurreikusteko modukoari baino ($2-1=1$). Eraitza horietan oinarriturik, Wynn-ek argudiatu zuen bost hilabeteko umeak gai direla alde aurretik hautemateko $1+1$ eta $2-1$ motako akzioen ondorioak.

Objektu kopuru txikiko multzoetan egiten diren batze- eta kentze-akzioez jabetzeko Wynn-ek aurkitu zuen umetxoek sentsibilitate honen erreferentzia, beste autore batzuek ere egin dute (Simon, Hespos eta Rochat, 1995; Uller *et al.*, 1999; Chiang eta Wynn, 2000).

4.3. Egungo egoera

Azken hamarkadetan bilduriko datu esperimentalak direla-eta, zalantza gutxi geratzen da ume jaioberriek daukaten zenbakizko zentzuaz, zeinaren bidez zenbait kantitate diferentzia eta zenbatetsi ditzaketan (Xu eta Arriaga, 2007; Spelke eta Kinzler, 2007). Egungo erronka nagusia zenbatekotasuna irudikatzen duen sistema aurrelinguistiko horren deskribapenean datza.

Puntu honetan azken urteotan eztabaidagai biziena hauxe izan da: estimuluen ezaugarri zenbakizkoak prozesatzeko ea haurtxoek duten sistema bakarra (zenbatekotasun edozein izanik ere) ala bikoitza (bat kantitate txikiatarako eta, beste bat, handietarako) den. Itxura guztien arabera, bigarren aukeraren inguruan biltzen ari da adostasun mailarik zabalena (Xu eta Arriaga, 2007; Féron *et al.*, 2006; Feigenson *et al.*, 2004).

4.3.1. Kopuru txikiko multzoak hautemateko sistema

Eredu honen arabera, objektu, jazoera edo soinu multzo txikiekin (1, 2 eta 3 elementuekin), umeak elementu bakoitzaren ezaugarri sentsitiboak kontrolatuz maneiaturiko du pertzepzio bidezko informazioa. Hori dela-eta, esan daiteke hautemate-egintza lotuago legokeela indibidualtasun sorta batekin, taldearen zentzu kardinalarekin baino. Zenbakizko erregulartasunei erreparatzeko sistema honen parekoa nagusien aditasunei buruzko ikerkuntzan deskribatu da eta *object file* delako modeloa da ezaguna (Kahneman *et al.*, 1992).

Modelo horren funtsa pertzepzioaren bidez jasotzen dugun informazioa kaotikoa ez izateko objektuen erregulartasunak hautemateko beharrezan datza, denboran zehar suerta daitezkeen aldaketak eta lekualdatzeak gorabehera. Hartara, estimuluen oinarritzko pertzepzio-prozesamenduaren eta beraien goi-mailako prozesamendu kontzientearen artean eredu honek beharrezkotzat jotzen ditu estimuluen errepresentazio-bitartekoak, aurreko bi mailaren arteko lotura bermatzen dutenak. Errepresentazio artekari horri *object file* deitzen zaio eta objektu-estimulu baten ezaugarri atxikiko litzazieke objektu horren espazio eta denborazko aldaketen barrena. Modu horretan *objektutasuna* hautemateko gauza gara, hau da, objektuaren izatasuna errekonozitzen dugu eta objektuak entitate gisa kontzientzian irauten du, itxuraldaketa, mugimenduak edo ezkutaketa izan arren (Mitroff *et al.*, 2005; Noles *et al.*, 2005).

Modelo horren ildotik, umeen kasuan egin diren ikerlanek ebidentzia aski mahairatzen dute haurtxoek *objektutasunaren* inguruko irudikapenak sortu eta mantentzen dituztela *object file* delako errepresentazio artekari esker (Cherries, Wynn eta Scholl, 2006).

Multzo txikien zenbatekotasunaz ohartzeko umeek daukaten ahalmenera bueltatuz, puntu horretaz aurkitu den adibide interesgarrietako bat beraien aritmetika-aldaketaz jabetzeko adierazten duten ahalmenean datza.

Ikerkuntza-lerro hori hasten da aurreko ataletan azalduko Wynn-en (1992) esperimenduekin. Hala ere, ikerlan horrek kritika zorrotzak jaso zituen, bereziki, Cohen eta Marks (2002) autoreen aldetik; izan ere, horien arabera umeek $1+1=1$ moduko eszenei luzarago so egiten zieten, aritmetikaren ulerkuntzarekin zerikusirik ez zuen beste arrazoi batengatik. Ikertzaile horien ustez, eta Hunter eta Ames-en (1988) lanetan oinarriturik, umeek, estimulu berrien gainetik, azalarazten dute estimulu-ekanduetarako preferentzia eta, ondorioz, panpinatxo bat erakutsiz gero, begiratuko diote panpinatxo bat agertzen deneko eszenari, 2 panpinatxo erakusten dituenari baino (hau da, $1+1=1$ moduko testa). Era berean, hasiera batean bi panpinatxo agertzen badira, geroan luzarago so egingo diote $2-1=2$ erako testari, $2-1=1$ delakoari baino. Autoreon arabera, hau ez litzateke gertatuko umeek emaitza okerraz nolabaiteko ulerkuntza dutelako, baizik eta haurtxoek estimulu-ekanduari erreparatzeko joera izaten dutelako.

Eztabaida-puntu honen inguruan zenbait esperimendu egin dira argitu guran benetan zeri erreparatzen dioten umetxoek, aritmetikan oinarrituriko ekintza okerrei ala estimulu-ekanduei. Apika, ildo honetako esperimenterik interesgarrienetako bat Kosbayashi eta bere kolaboratzaileek (2004) burututakoa dugu.

Esperimentu hori, Wynn-enean bezala, presuntzio haustuaren metodologian datza eta umetxoek begiratze-jokabide ezberdina agertzen zuten $1+1=2$ edo $1+1=1$ moduko eszenetan. Alde nabarmena, ordea, hauxe zen: estimulu ikusizkoekin batera entzunezkoak ere agertzen zirela; hau da 1 panpinatxo + 1 soinua = 2 (aurreikusteko modukoa).

Hartara ikertzaileek haurtxoak ikusten ohitzen zituzten objektu batzuek gainazal baten kontra jotzen zutela eta, ondorioz, zarata sortzen zutela. Geroan, inpaktuaren unea ezkututzen zen pantailatxo baten bidez eta haurtxoek, nolabait, asmatu beharra zuten objektuak gainazalaren kontra talka egiten zutela. Test fasean umetxoak beti lehenengo objektua ikusten zuen baina bigarrena eta, bere kasuan, hirugarren bat ere, ez ziren ikusten; izan ere, pantaila bat jasotzen zen eszena estaltzeko. Ikusizko estimulua ordez umetxoak aditzen zuen inpaktu baten soinua (edo, bere kasuan, bi).

	<i>Presuntzioa hausten duen gertaera</i>	<i>Aurreikusteko moduko gertaera</i>
1. testa	1 objektu + 2 soinu = 2 jazoera	1 objektu + 1 soinu = 2 jazoera
2. testa	1 objektu + 1 soinu = 3 jazoera	1 objektu + 2 soinu = 3 jazoera

2. taula. Gertaera motak umeen aritmetika-abileziak aztertzeko (Ksbayashi *et al.*, 2004)

Bigarren taulan erakusten da zeintzuk izan ziren ikertzaile horiek erabili zituzten aurreikusteko moduko gertaerak eta presuntzioa hausten zutenak; hain zuzen ere, filmatuz, aztertzeko zein zen umetxoek begiratze-jokabidea.

Emaitzek ez zuten ezbaietarako tarterik uzten; izan ere, haurtxoek estatistikoki luzaroago so egiten zieten presuntzioak hausten zituzten eszenei, aurreikusteko moduko baina. Kasu horretan Hunter eta Ames-en (1988) estimulu-ekanduen argudioak ezin zuen azaldu gertaera; izan ere, lehenengo estimulua eta azkena ez datoz bat baina, horrez gain, datu berriak mahairatzen ziren umetxoek aritmetika-abilezien inguruan, zeren eta haurtxoak gai ziren zentzumen ezberdinez jasotako informazioa konbinatzeko. Esperimentu sorta horien egileen ustez:

Ikertzaile batzuen ustez umetxoek ez dute erantzuten [estimuluen] zenbakizko propietateetara baizik eta estimuluen ez-zenbakizko ezaugarrietara (esaterako, gainazalaren azalera edo ikusizko objektuen ingeradaren luzera)(...)hala eta guztiz ere, ikerlan honetan umetxoek jokabidea ezin da esplikatzen [eszenen] karakteristika sensorial horien bidez zeren eta ikusizko zein entzunezko objektuak erabili baitira (Ksbayashi *et al.*, 2004: 31).

Egileek ondorioztatu zuten umeez adierazten zituzten aritmetikarako abileziak ez daudela zentzumen mota bakar baten pean eta zentzumen ezberdinen informazioa integratu ahal izateko, ezinbestean, bost hilabeteko haurtxoek estimuluen zenbakizko ezagugarrien gainean halako irudikapen abstraktuak eratu behar zituztela.

4.3.2. Kopuru handiko multzoak hautemateko sistema

Bestalde, arestian aipatu bezala, objektu multzo txikiak hautemateko gaitasunaz aparte, egungo modelorik onartuenaren arabera umeak bestelako sistema baten bidez ohartu eta irudikatzen ditu kantitate eta multzo handiak (esaterako 8, 12, 18, 32 puntuz osaturiko laminak) (Brannon, 2006; Féron *et al.*, 2006; Nieder, 2005; Spelke eta Kinzler, 2007; Xu eta Arriaga 2007; Xu *et al.*, 2005).

Estimuluen zenbakizko erregulartasunak hautemateko bigarren sistema honek, ordea, aurrekoarekin parekaturik zenbait berezitasun ditu. Lehenbizi, aipatu beharra dago objektu-bildumen gaineko gutxi gorabeherako estimazioak baino ez dituela ahalbidetzen eta estimazioak egiteko gaitasun hori oso lotuta dagoela bereiztekoak diren kantitateen arteko ratioarekin, baita umearen adinarekin ere.

Hala, 6 hilekin haurtxoek bereizten dituzte 1:2 ratioko zenbatekotasunak (esaterako, umei 8 puntuz osaturiko erakuskaria bereizgarri egiten zaie 16 puntu dituen beste batetik) baina ez, ordea, 2:3 ratiokoak (8 *versus* 12). Azken ratio hori, ordea, bereizteko gauza dira 9-10 hilabeterekin baina kale egiten dute 4:5 ratioko kantitateak antzemateko (esperimentu hauek ikusgai daude Xu-k eta Arriagak, 2007, argitaraturiko ikerlan interesgarrian).

Horrekin batera, aipatzekoa da zenbatekotasunak irudikatzeko gutxi gorabeherako sistema hau (literaturan *analog magnitude representations* izenaz ezagutua) aurkitu egin dela ume txikien kasuan ez ezik, gizaki nagusien eta bestelako primateen kasuan ere (horren inguruko erreferentzia-bilduma egokia Brannon-ek (2006) eta Xu-k eta besteek (2005) eskaintzen dute).

Edonola ere, kasu guztietan ikusi da esperimenduetako subjektuek adierazten dituzten multzoen arteko bereizketak egiteko gaitasuna hobetuz doala multzoen arteko aldea handitu ahala, baina, betiere, kantitateen arteko ratioarekin lotuta, ez balio absolutuarekin (Weber-en araberakoa, alegia).

Bestalde, ikerlanetan erregistratu da ikusizko zein entzunezko estimuluekin ondorio antzekoetara iristen dela, beraz, sistema honek ez du erlaziorik estimuluen izaerarekin (Xu eta Arriaga, 2007; Spelke eta Kinzler, 2007). Azken ideia horrek iradokitzen du gizakiongan zenbakien errepresentazio abstraktuak egon litezkeela oso etapa goiztiarretatik (Féron *et al.*, 2006).

Amaitzeko nabarmendu beharra dago egun ez dela ezagutzen zergatik magnitude analogikoen moduko sistema honek kale egiten duen zenbatekotasun txikiak irudikatzeko. Fei Xu eta kolaboratzaileen ustetan (2005), litekeena da zenbatekotasun txikiekin ere sistema honek esku hartzea baina ikusitako *object file* delako sistema inhibitzailea suerta lekiok. Alabaina, autoreek aitortzen dute hauxe dela oraindik orain ikertu beharra dagoen atala.

5. Ondorioak

Zenbakizko kognizioaren inguruan egin den ikerkuntzak eskaintzen dituen datuen arabera, ezin da pentsatu gaitasun hau gizaki nagusiei eskusibaz dagokienik. Artikulu honetan zehar azaldu den bezala, hainbat ebidentziak argiro azalarazten

dute hilabete gutxiko haurrek duten ingurumariko erregularitasun zenbakizkoetz jabetzeko ahalmena. Bestalde, hainbat ikerlanek nabarmendu dute zenbait animaliak ere estimuluaren karakteristika kuantitatiboez jabetzeko ahalmena izan badutela (Jordan eta Brannon, 2006; Flombaum *et al.*, 2005; Nieder, 2005; Lyon, 2003).

Haurren kasuari dagokionez, 3. taulan aurkezten da umeen aritmetika-abilezien garapenaren gaineko ikerkuntzak agertu dituen datuen laburpena (Butterworth, 2005).

ADINA (urte-hil)	JAZOERA
0-4	Zenbatasun txikiak diskrimina ditzakete
0-11	Goranzko sekuentziak bereizten dituzte beheranzkoetatik
2-0	Zenbatze-hitzak ikasten hasten dira
2-6	Zenbatze-hitzak objektu bat baino ez adierazteko erabiltzen direla ulertzen dute
3-0	Zenbatu ditzakete objektu kopuru txikiak
3-6	Gehitu bat edo kendu bat ekintzak egin ditzakete objektuekin, baita zenbatze-hitzekin ere
4-0	Multzo bati dagokion zenbaki kardinala ezar dezakete
4-0	Hatzen bidez batuketak egiten dituzte
5-0	Zenbaki txikiak gehi ditzakete, zenbaketak egin gabe
5-6	Batuketaren trukatzeko-propietatea (lege konmutatiboa) aplikatzen dute
	30-40 arteko zenbatze-hitzak esan ditzakete.
6-0	Piageten ikuspegiko zenbakiaren iraunkortasun-konzeptua bereganatu dute
6-6	Batuketaren eta kenketaren arteko osagarritasun-zentzua dute
	80 arte, gutxi gorabehera, zenbatze-hitzak esan ditzakete
7-0	Aritmetikako egitateak memoriatik eskura ditzakete

3. taula. Aritmetikaren bilakaerako mugarren estimazio kronologikoa (Butterworth, 2005)

Datu horiek eta idazki honetan zehar agerturiko panorama laburbilduz, lehenbiziko ondorio gisa aipa daiteke Piaget-ek zenbaki-zentzu osoaren ulerkuntzarako ezartzen zuen muga baino dezente lehenago, haurraren pentsamendu matematikoaren bilakaera, bere aberastasun kognitiboagatik, arretaz aintzat hartzeko fenomeno dela.

Hirugarren taulan Butterworth-ek (2005) aurkezten duen mugarren estimazio kronologikoan, mintzamenak bi aroren arteko muga ezartzen du. Lehendabizikoa zenbatze-hitzak errateko gauza izan baino lehenagokoa da (hau da, bi urte baino lehen) eta horretan badirudi umeak zabalduz doala bere sortzetiko gaitasuna inguruko estimuluaren erregularitasun zenbakizkoetz erreparatzeko (Diaz, 2006). Etapa horretaz hauxe laburbil daiteke:

1. Hilabete gutxiko haurrek ere gaitasuna dute zenbakizko informazioa detektatzeko.
2. Zenbakizko informazioa ikusmen, entzumen eta ukimenaren bidetik jaso dezaketela; bereizita edo zentzumen ezberdinetatik jasotako informazioa integratuz.
3. Oinarrizko aritmetikarekin loturiko akzioez jabetzeko gauza dira.

4. Aurreko ideietatik eratorzen da haurtxoak gauza direla entitate ezberdinen zenbategotasunaren abstrakzioa egin, memorian izan eta informazio berriarekin konparatzeko.
5. Abilezia horiek kultura eta mintzairaren eskuratze-prozesutik independenteak dira.

Idea hauek bat datoz giza kognizioaren inguruan egin diren ikerketekin zeinen arabera sortzetiko lau kognizio-sistemak karakterizatzen dute giza kognizioa: (a) izate bizigabe eta euren interakzio mekanikoen sistemak, (b) pertsonen jokabide eta euren asmoenak, (c) distribuzio espazial eta bere erlazio geometrikoenak, eta, (d) multzo eta euren zenbakizko ordenatze-, batze- eta kentze-erlazioenak (Spelke eta Kinzler, 2007).

Sortzetiko ahalmen horietatik umeak bide luzea egin beharko du gizarteak adosturik duen matematikaren gaineko ezaguera formalera. Bide horren hasiera 2 urte inguruan kokatzen da, zenbatze-hitzak erabiltzen ikastearekin eta bide horren helmuga, zenbatze-printzipioen eraketa izango da (Gelman eta Gallistel, 1978; Gelman eta Meck, 1983).

Garai horretan haurrak zenbatze-hitzekin egiten duen erabilera doituz joango da ingurutik jasotzen dituen exigentzietara eta doitze-prozesu hori erabilera este-reotipatuetan oinarritzen bide da. Erabiltze mota horren bidez, umea matematika-sinboloez (kasu honetan, berbazko sinboloez) baliatzen hasiko da zenbakien zentzu osoa bereganatuta izan aurretik, baina erabilera hori izango da, hain zuzen ere, kontzeptua hezurramitzen lagunduko diona. Fase horretan geroko zenbaki-adieraren fundamentuak ezartzen diren aldetik, benetako pentsamendu matematikoaren pausotzat jotzeko modukoa da, zenbakien zentzuaren gaineko erabateko ulertzearekin identifikatzerik izan gabe ere.

Operazio-aurreko etaparen amaierak beste une garrantzitsu bat ekarriko du: adiera ordinal eta kardinalen ulertze osoa, Piaget-ek adierazi legez, zenbakiaren inguruko ulertze osoa ahalbidetuko duena. Une horretan haurrak pertzepzio bidezko informazio aldakorra gorabehera, zenbakiak irauten duelako printzipioa bereganatua izango du.

Edonola ere, beharbada ikuspegi piagetarra osatu beharra dago artikulua honean zehar agerturiko datu berriekin, zeinek iradokitzen baitute ia-ia jaiotzatik bertatik dela kontuan hartzeko modukoa haurren pentsamendu matematikoaren bilakaera, geroko matematika-nozioen ulerkuntzan izan ditzakeen ondorioengatik ez ezik, bere berezko prozesuetako joritasunagatik ere.

Bibliografia

- Alonso, D. eta Fuentes, L. (2001): "Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático", *Revista de Neurología*, **33**, 568-576.
- Baillargeon, R. (1987): "Object permanence in 3.5- and 4.5-month-old infants", *Developmental psychology*, **23**, 655-664.
- Baillargeon, R.; Spelke, E. S. eta Wasserman, S. (1985): "Object permanence in five-month-old infants", *Cognition*, **20**, 191-208.

- Benigno, J. eta Ellis, S. (2004): "Two is greater than three: effects of older siblings on parental support of preschoolers' counting in middle-income families", *Early Childhood Research Quarterly*, **19.1**, 4-20.
- Brannon, E. (2006): "The representation of numerical magnitude", *Current Opinion in Neurobiology*, **16.2**, 222-229.
- Brannon, E.; Lutz, D. eta Cordes S. (2006): "The development of area discrimination and its implications for number representation in infancy", *Developmental Science*, **9.6**, 59-64.
- Bryant, P. (1996): "Mathematical Understanding in the Nursery School Years", *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*, Psychology Press, 53-67.
- Butterworth B. (2005): "The development of arithmetical abilities", *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, **46**, 1, 3-18.
- Chamorro, M.; Belmonte J.; Ruiz, M. eta Vecino, F. (2006): *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*, Madrid, Prentice Hall.
- Cherries, E.; Wynn, K. eta Scholl, B. (2006): "Interrupting infants' persisting object representations: an object-based limit?", *Developmental Science*, **9.5**, 50-58.
- Chiang, W. C. eta Wynn, K. (2000): "Infants' representations and teaching of objects: implications from collections", *Cognition*, **77**, 169-195.
- Cohen, K. R.; Cohen, K. K.; Kaas A.; Henik, A. eta Goebel, R. (2007): "Notation-dependent and -independent representations of numbers in the parietal lobes", *Neuron*, **53**, 307-314.
- Cohen, L. B. eta Marks, K. S. (2002): "How infants process addition and subtraction events?", *Developmental Science*, **5**, 186-212.
- Daniel. A. (2007): "Does the Parietal Cortex Distinguish between "10," "Ten," and Ten Dots?", *Neuron*, **53.2**, 165-7.
- Díaz, R. (2006): "Innatismo y Cultura en el Aprendizaje de la Noción de Número", *Revista Cognición*, **5**, 37-50.
- Durkin, K.; Shire, B.; Riem, R.; Crowther, R. eta Rutter, D. (1986): "The social and linguistic context of early number development", *British Journal of Developmental Psychology*, **4**, 269-288.
- Feigenson, L.; Dehaene, S. eta Spelke, E. S. (2004): "Core systems of number", *Trends in Cognitive Sciences*, **8**, 307-314.
- Feron, J.; Gentaz, E. eta Streri, A. (2006): "Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-Month-old infants", *Cognitive development*, **21.2**, 81-92.
- Flombaum, J.Ç; Junge, J. eta Hause, M. (2005): "Rhesus monkeys (Macaca mulatta) spontaneously compute addition operations over large numbers", *Cognition*, **97.3**, 315-25.
- Fuson, K. C.; Lyons, B.; Pergament, G. eta Hall, J. W. (1988): "Effects of collection terms on class-inclusion and on number tasks", *Cognitive Psychology*, **20**, 96-120.
- Gelman, R. (1972): "The nature and development of early number concepts", in H. Reese, *Advances in Child Development and Behavior*, Academic Press, New York, 115-67.
- Gelman, R. eta Gallistel, C. (1978): *The child's understanding of number*, Harvard University Press.
- Gelman, R. eta Meck, E. (1983): "Preschooler's counting: principles before skill", *Cognition*, **13**, 343-360.
- Gréco, P. (1962): "Quantité et quotité", *Structures numériques élémentaires*, P.U.F., Paris.
- Hunter, M. eta Ames, E. (1988). "A multiple model of infant preferences for novel and familiar stimuli", in C. Rovee-Collier eta L. P. Lipsitt (edit.), *Advances in infancy research*, Norwood, NJ: Ablex, (5) (69-95).

- Jordan, K. E. eta Brannon, E. M. (2006): "Weber's law influences the numerical representations in rhesus macaques (*Macaca mulatta*)", *Animal Cognition*, **9**, 159-172.
- Kahneman, D.; Treisman, A. eta Gibbs, B. (1992): "The reviewing of object files: Object-specific integration of information", *Cognitive Psychology*, **24**, 175-219.
- Kobayashi, T.; Hiraki, K.; Mugitani, T. eta Hasegawa, T. (2004): "Baby arithmetic: One object plus one tone", *Cognition*, **91.2**, 23-34.
- Lyon, B. (2003): "Egg recognition and counting reduce costs of avian conspecific brood parasitism", *Nature*, **422**, 495-499.
- Mehler eta Bever (1967): "Cognitive Capacity of very young children", *Science*, **158**, 141-142.
- Mitroff, S.; Scholl, B. eta Wynn, K. (2005): "The relationship between object files and conscious perception", *Cognition*, **96.1**, 67-92.
- Nieder, A. (2005): "Counting on neurons: The neurobiology of numerical competence", *Nature Reviews Neuroscience*, **6**, 177-190.
- Noles, N.; Scholl, B. J. eta Mitroff, S. R. (2005): "The persistence of object-file representations", *Perception eta Psychophysics*, **67**, 324-334.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*, New York, Norton.
- Piazza A.; Pinel, P.; Bihan, D. eta Dehaene, S. (2007): "A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex", *Neuron*, **53.2**, 293-305.
- Sfard, A. (2000a): "Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other", in P. Cobb, K. Yackel eta K. McClain, *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design*, NJ: Erlbaum. Mahwah, 37-98.
- , (2000b): "Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects", *Journal for Research in Mathematics Education*, **31.3**, 296-327.
- Simon, T.; Hespos, S. eta Rochat, P. (1995): "Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992)", *Cognitive development*, **10**, 253-269.
- Sophian, C. (1988): "Limitations on preschool children's knowledge about counting: Using counting to compare two sets", *Developmental psychology*, **24**, 634-640.
- Spelke, E. S. eta Kinzler, K. D. (2007): "Core knowledge. Developmental", *Science*, **10**, 89-96.
- Starkey, P. eta Cooper, R. G. (1980): "Perception of numbers by human infants", *Science*, **210**, 1033-1035.
- Starkey, P.; Spelke, E. S. eta Gelman, R. (1983): "Detection of intermodal numerical correspondences by human infants", *Science*, **222**, 179-181.
- Uller, C.; Huntley-Fenner, G.; Carey, S. eta Klatt, L. (1999): "What representations might underlie infant numerical knowledge?", *Cognitive development*, **14**, 1-36.
- Welberg, L. (2007): "What counts?". *Nature Reviews Neuroscience*, **8**, 168-169.
- Wynn, K. (1992): "Addition and subtraction by human infants". *Nature*, **358**, 749-750.
- Xu, F. eta Arriaga, R. (2007): "Number discrimination in 10-month-old infants", *British Journal of developmental psychology*, **25**, 103-108.
- Xu, F.; Spelke, E. eta Goddard, S. (2005): "Number Sense in Human Infants", *Developmental Science*, **8.1**, 88-101.

